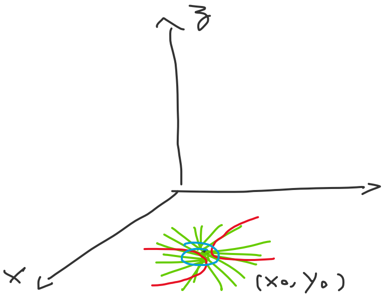
Esercitazione 5

lunedì 2 novembre 2020 22:08

LIMITI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

$\|(x,y)\| \longrightarrow +\infty$



Considero alcune restrizioni

(es. $x=x_0$, $y=y_0$, $y=mx+q$, ...)

trovo 2 restrizioni che danno LIMITE DIVERSO

$\Downarrow$

$\nexists \lim f(x,y)$

Se tutte le restrizioni danno lo stesso limite $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\lim f(x,y) = L$ $\qquad$ $\nexists \lim f(x,y)$

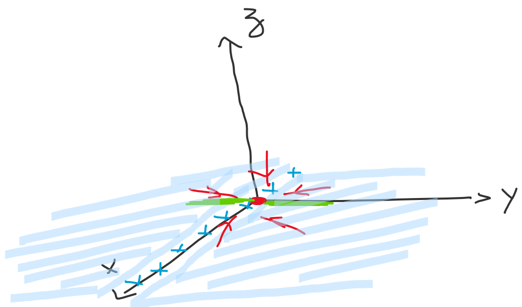
Per decidere

- Coordinate polari
- maggiorazioni o minorazioni
- definizione

ESERCIZI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2+y^2}{y}}_{f(x,y)}$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , y \neq 0\}$



PROVO ALCUNE RESTRIZIONI

$\downarrow$

curve passanti per $(0,0)$

- ~~asse~~ x i suoi punti $\notin D$
- asse y
- rette generiche passanti per $(0,0)$
- parabole generiche passanti per $(0,0)$

- Asse y : $x=0$ (ovvero punti del tipo $(0,y)$)

Trovo l'immagine dei punti $\in$ asse y.

$$f(0,y) = \frac{0^2+y^2}{y} = \frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}} = y$$

($y \neq 0$ poiché $(0,0) \notin D$)

Lungo l'asse y, il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si riduce a $\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} y = 0$

$$\Downarrow$$

Il limite globale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\begin{cases} = 0 \\ = \nexists \end{cases}$

- Rette passanti per l'origine: $y = mx$

al variare di m ho una retta diversa, cioè una restrizione diversa

Trovo l'immagine dei punti $\in$ alla generica retta $y = mx$

$$f(x, mx) = \frac{x^2+(mx)^2}{mx} = \frac{x^{\cancel{2}}(1+m^2)}{m\cancel{x}} = \frac{x(1+m^2)}{m}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+m^2)}{m} = \frac{1+m^2}{m} \lim_{x\to 0} x = \frac{1+m^2}{m} \cdot 0 = 0$$

fissando una restrizione cioè una retta $y=mx$, cioè un valore di m

- Parabole con vertice in $(0,0)$ $y = ax^2$

$$f(x, ax^2) = \frac{x^2+(ax^2)^2}{ax^2} = \frac{\cancel{x^2}(1+a^2x^2)}{a\cancel{x^2}} = \frac{1}{a}(1+a^2x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{a}(1+\underbrace{a^2x^2}_{0}) = \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$ lungo la parabola $y = ax^2$ ho trovato il limite per $(x,y)\to(0,0)$ fa $\frac{1}{a}$

Es. lungo $y = x^2 \longrightarrow \lim = 1 \neq 0$ Ho trovato una restrizione ($y = x^2$) che da $\lim \neq 0$

lungo $y = 2x^2 \longrightarrow \lim = \frac{1}{2}$

RESTRIZIONE $x=0$. $\lim = 0$

" " $y=0$. $\lim = 1$

$\Big\} \Longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^2y^4}{x^2+2y^4}$$

$D: \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^4}_{\geq 0} \neq 0$ — $x^2+2y^4=0 \iff x=0 \wedge y=0$

$\Updownarrow$

$(x,y) \neq (0,0)$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

CONSIDERO ALCUNE RESTRIZIONI

Asse x $\quad y=0$

$$f(x,0) = \frac{x^4+x^2\cdot 0^4}{x^2+2\cdot 0^4} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \longrightarrow \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Longrightarrow$$ Il limite globale o è 0 o $\nexists$

Asse y: $\quad x=0$

$$f(0,y) = \frac{0}{2y^4} = 0 \longrightarrow \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Retta generica passante per $(0,0)$. $\quad y=mx$

(esclusi asse x e y)

$$f(x,mx) = \frac{x^4+x^2(mx)^4}{x^2+2(mx)^4} = \frac{\cancel{x^4}(1+m^4x^2)}{\cancel{x^2}(1+2m^4x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+m^4x^2)}{1+2m^4x^2} = 0$$

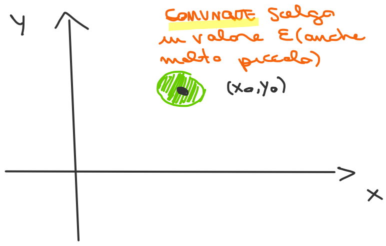
DEFINIZIONE

Provo a dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ "l"

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0 \quad \underbrace{\exists \delta>0 : \forall (x,y),\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2}_{} \quad |f(x,y)-l|<\varepsilon$$

$\exists$ un cerchio di raggio δ centrato in (x_0,y_0) tale che l'immagine di tutti i punti $\in$ cerchio si discosta da l per una quantità minore di ε

Comunque scelgo un valore ε (anche molto piccolo)



In particolare, se (x_0,y_0) è l'origine $(0,0)$

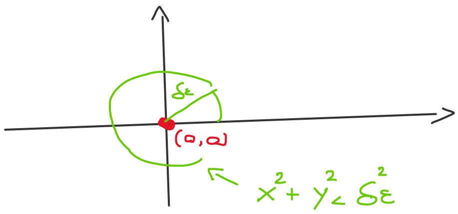
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l\in\mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 .\ \forall(x,y),\ x^2+y^2<\delta^2 \quad |f(x,y)-l|<\varepsilon$$

$$|f(x,y)-l| = \left|\frac{x^4+x^2y^4}{x^2+2y^4} - 0\right| = \frac{x^2(x^2+y^4)}{x^2+2y^4} \le \frac{x^2(\cancel{x^2+2y^4})}{\cancel{x^2+2y^4}} = x^2 < \delta_\varepsilon^2 < \varepsilon$$

Riesco a fissare δ_ε in modo che $\delta_\varepsilon^2 < \varepsilon$

sì. es. $\delta_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$

e più in generale $\delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$ ✓



$x^2+y^2<\delta_\varepsilon^2$

e inoltre: $|x|<\delta_\varepsilon$

$|y|<\delta_\varepsilon$

es) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y)=0 \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$

$$f \text{ è continua in } (0,0) \iff \begin{cases} \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \\ \text{e} \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \end{cases}$$

Dobbiamo quindi verificare se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

DEFINIZIONE

$$|f(x,y)-l| = \left|\frac{x^2y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2\cdot|y|^3}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{(xy)^2\cdot|y|}{x^2+y^2} \le \frac{\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]^2\cdot|y|}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}\cdot|y|}{4\cancel{(x^2+y^2)}} <$$

$x^2+y^2<\delta_\varepsilon^2$

$|y|<\delta_\varepsilon$

$$< \frac{\delta_\varepsilon^2\cdot\delta_\varepsilon}{4} = \frac{\delta_\varepsilon^3}{4} < \varepsilon$$

se scelgo $\delta_\varepsilon < \sqrt[3]{4\varepsilon}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Longrightarrow f \text{ é continua in } (0,0)$$

DISUGUAGLIANZA NOTEVOLE

$$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$(x+y)^2\ge 0 \longrightarrow x^2+y^2+2xy\ge 0$

$-xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$(x-y)^2\ge 0 \longrightarrow xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$